

CvV

Raian

1 de abril de 2026

Índice general

1	Espacios vectoriales normados	3
1.1	Normas	3
1.2	Producto interno	5
1.3	Bolas, segmentos y conjuntos convexos	7
1.4	Sucesiones	9
2	Topología euclídea de \mathbb{R}^n	11

1 Espacios vectoriales normados

Durante este capítulo se asume que V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

1.1. Normas

Se abstrae la noción de distancia a través la norma.

Definición 1.1.1. Llamamos norma en V a una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ si cumple que para todo $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$. (*definida positiva*)
2. $|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\|$ (*homogeneidad*).
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (*desigualdad triangular*).

Lema 1.1.2 (Desigualdad triangular inversa). Sean $v, w \in V$, entonces $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$

Demostración. Véase que $\|v\| = \|(v - w) + w\|$, aplicamos la desigualdad triangular $\|v\| \leq \|v - w\| + \|w\|$ y $\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$; de forma análoga $\|w\| - \|v\| \leq \|v - w\|$. \square

Las siguientes normas son las más utilizadas en \mathbb{R}^n .

Definición 1.1.3 (Normas L_p). Sea $p \geq 1$ y $V = \mathbb{R}^n$, llamamos norma L_p a

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Además definimos la p -infinita por $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$

Si son normas han de cumplir la desigualdad triangular; para demostrar esto usaremos una serie de lemas, cada uno demostrado por el anterior.

Definición 1.1.4 (Función convexa). Llamamos a la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa si $f''(x) \geq 0$.

Entonces para $x < \alpha < y$ tenemos que

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} \leq \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}.$$

Además sabemos que para $t \in [0, 1]$, $x < tx + (1 - t)y < z$, entonces sustituyendo $\alpha = tx + (1 - t)y$ y haciendo las cuentas (creeme) llegamos a que

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Lema 1.1.5. Sean $\alpha', \beta' \geq 0$ tal que $\alpha' + \beta' = 1$, si $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces para todo $x, y \in D$

$$\alpha' f(x) + \beta' f(y) \geq f(\alpha' x + \beta' y)$$

Lema 1.1.6 (Desigualdad de Young). Sean $a, b \geq 0$ y $\alpha, \beta > 1$ tal que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{b^\beta}{\beta}$$

Atentos a la magia negra.

Demostración. Véase que $f(x) = \exp(x)$ es convexa en su dominio. Usando el lema 1.1.5 tenemos que

$$\frac{1}{\alpha} \exp(x) + \frac{1}{\beta} \exp(y) \geq \exp\left(\frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\beta}y\right)$$

eligiendo $x = \log(a^\alpha)$ e $y = \log(b^\beta)$ y simplificando, entonces

$$\frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{b^\beta}{\beta} \geq ab$$

□

Lema 1.1.7 (Desigualdad de Hölder). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, tal que $x_i, y_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$; $\alpha, \beta > 1$ tal que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_\alpha \cdot \|y\|_\beta$$

Demostración. Si $\|x\|_\alpha = 0$ o $\|y\|_\beta = 0$, entonces es trivial; asume que no lo son. Basta demostrar que $\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\|x\|_\alpha \|y\|_\beta} \leq 1$. Para esto, consideramos el i -ésimo término de la expresión anterior y aplicamos la desigualdad de Young 1.1.6

$$\left(\frac{x_i}{\|x\|_\alpha}\right) \cdot \left(\frac{y_i}{\|y\|_\beta}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x_i^\alpha}{\|x\|_\alpha^\alpha}\right) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{y_i^\beta}{\|y\|_\beta^\beta}\right);$$

sumamos ahora los n términos y agrupamos

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\|x\|_\alpha \|y\|_\beta} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}{\|x\|_\alpha^\alpha}\right) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i^\beta}{\|y\|_\beta^\beta}\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

□

Lema 1.1.8 (Desigualdad de Minkowski). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $p \geq 1$, entonces

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Demostración. Si $p = 1$, sumando $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ obtenemos $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$. Sea $p > 1$ y $q = \frac{p}{p-1}$, de modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Denotamos $a_k = |x_k|$ y $b_k = |y_k|$; como $|x_k + y_k| \leq a_k + b_k$ se tiene $\|x + y\|_p \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p}$ y $\|a\|_p = \|x\|_p$, $\|b\|_p = \|y\|_p$, luego basta demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

Escribamos

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

y aplicamos Hölder a cada suma con exponentes p y q . Como $(p-1)q = (p-1) \cdot \frac{p}{p-1} = p$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} &\leq \|a\|_p \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/q}, \\ \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1} &\leq \|b\|_p \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/q}; \end{aligned}$$

sumando,

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq (\|a\|_p + \|b\|_p) \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/q}.$$

Si $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = 0$ la desigualdad es trivialmente $0 \leq 0$. En caso contrario dividimos ambos lados por $\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/q}$; como $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

□

Teorema 1.1.9 (Las normas L_p son normas).

Definición 1.1.10 (Normas equivalentes). Llamamos a dos normas $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ equivalentes si existen $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $x \in V$

$$C_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq C_2 \|x\|$$

Teorema 1.1.11 (Equivalencia de normas en \mathbb{R}^n). *En \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes*

Demostración. De momento esto te lo vas a tener que creer. □

1.2. Producto interno

Definición 1.2.1 (Producto interno). Llamamos producto interno en V a una función bilineal simétrica definida positiva $\langle x, y \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ dándose la igualdad si y solo si $x = 0$,
2. para todo $y \in V$ la función $x \mapsto \langle x, y \rangle$ es lineal,
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

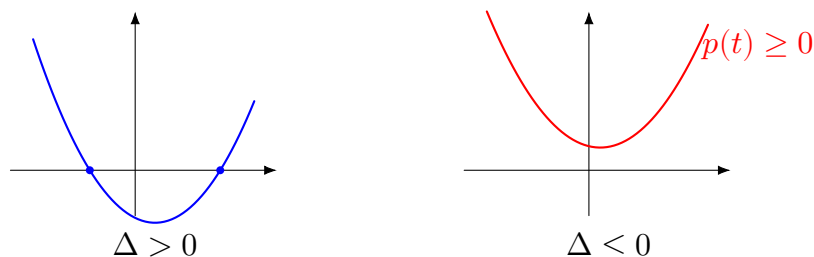
Proposición 1.2.2 (Norma inducida por un producto interno). *Dado un producto interno, la función $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es una norma.*

Para demostrar que cumple la desigualdad triangular usaremos el [Teorema 1.2.4](#) (Cauchy-Schwarz), y para demostrar este el siguiente lema.

Lema 1.2.3. *Sea $p(t) = at^2 + bt + c$, con $a, b, c, t \in \mathbb{R}$, tal que $p(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces el discriminante es no positivo*

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

La idea es sencilla: como $a > 0$, la parábola $p(t)$ abre hacia arriba. Si $p(t) \geq 0$ para todo t , entonces nunca cruza el eje horizontal, luego tiene a lo sumo una raíz (la del vértice) y por tanto $\Delta \leq 0$.



Demostración. Como $p(t) \geq 0$ para todo t y $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \text{signo}(a) \cdot \infty$, necesariamente $a > 0$. Evaluamos p en el vértice $t_0 = -\frac{b}{2a}$:

$$0 \leq p(t_0) = a \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Como $a > 0$, multiplicando por $4a$ obtenemos $-\Delta \geq 0$. □

Teorema 1.2.4 (Cauchy-Schwarz). *Sea $x, y \in V$, si la norma es la inducida por el producto interno, entonces*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Demostración. Como la norma está inducida por el producto interno, para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|x\|^2.$$

Este es un polinomio de grado 2 en t que es no negativo para todo t ; por el [Lema 1.2.3](#) su discriminante es no positivo:

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

dividiendo por 4 obtenemos $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$, y tomando raíces concluimos $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. \square

Verifica por ti mismo que ahora se puede demostrar que es una norma.

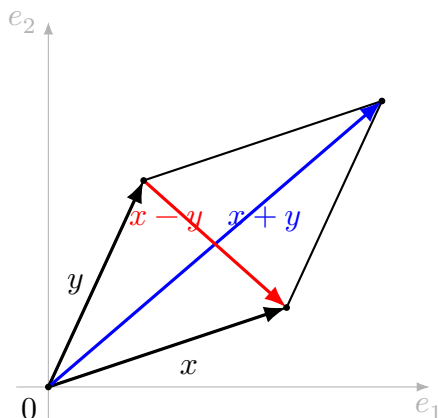
Proposición 1.2.5 (Ley del paralelogramo). *Una norma está inducida por un producto interno si y solo si cumple que para todo $x, y \in V$*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Demostración. Asume que la norma $\|\cdot\|$ está inducida por un producto escalar, observa que $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y, x \pm y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\langle x, y \rangle$ y entonces se verifica la ley del paralelogramo.

Se deja como tortura para el lector verificar que el enunciado converso es cierto. Es difícil, no lo intentes. \square

En \mathbb{R}^2 se ilustra de la siguiente forma y se puede demostrar usando geometría elemental que la ley se da en todo paralelogramo.



1.3. Bolas, segmentos y conjuntos convexos

Habiendo generalizado la noción de distancia, generalizamos la de intervalo.

Definición 1.3.1 (Bola abierta). Definimos la bola abierta con centro $a \in V$ y radio $\epsilon > 0$

$$B_\epsilon(a) = \{v \in V : \|v - a\| < \epsilon\}$$

Ejemplo 1.3.2. Sea $V = \mathbb{R}^2$, ilustramos las bolas abiertas con centro 0 y radio 1 para las normas L_p , $p = 1, 2, 3, 4, \infty$ en la [Figure 1.1](#).

Generalizamos ahora la noción de segmento entre dos puntos.

Definición 1.3.3 (Segmento). Dados dos puntos $x, y \in V$ llamamos segmento a

$$[x, y] = \{z \in V : z = tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\}$$

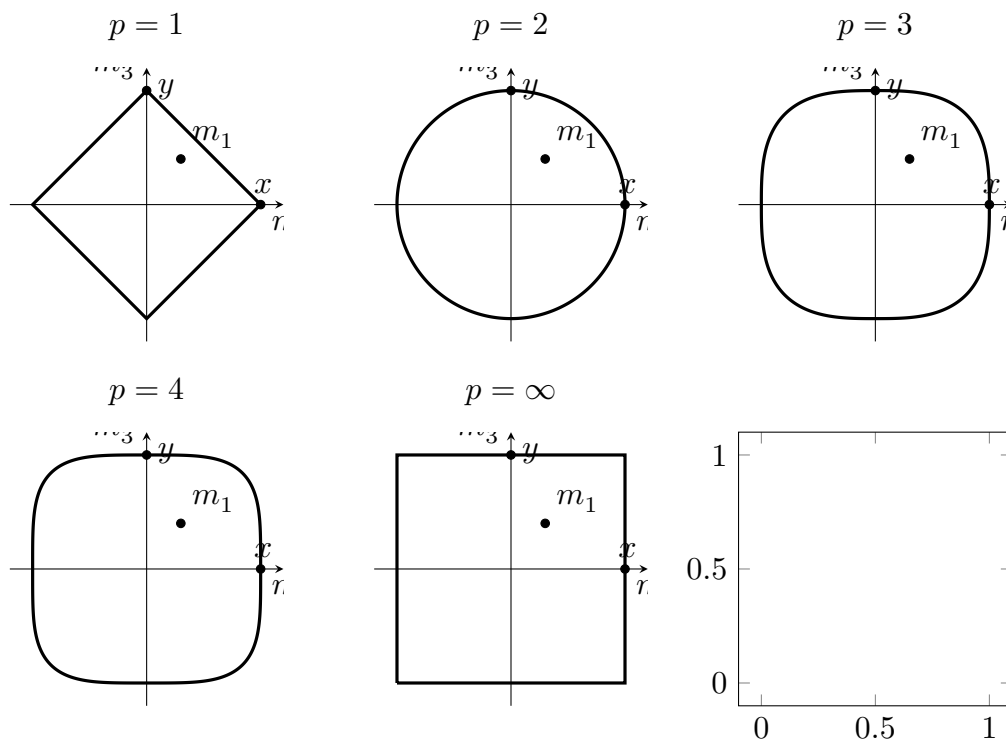


Figura 1.1: Bolas abiertas de radio 1 para $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{R}^2 , con puntos $m_i \in \overline{B}_p(0, 1)$.

Definición 1.3.4 (Conjunto convexo). Decimos que un conjunto $C \subseteq V$ es convexo si para todo $x, y \in C$ el segmento que los une está contenido $[x, y] \subseteq C$

Lema 1.3.5 (Toda bola abierta es un conjunto convexo).

Demostración. Sea $x, y \in B_\epsilon(a)$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \| [tx + (1-t)y] - a \| &= \| [tx + (1-t)y] - a + ta - ta \| \\ &= \| t(x-a) + (1-t)(y-a) \| \leq t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| < \epsilon \end{aligned}$$

y entonces $tx + (1-t)y \in B_\epsilon(a)$ □

Informal 1.3.6. Ya definimos función convexa en \mathbb{R} pidiendo $f'' \geq 0$. Resulta que esto es equivalente a pedir que la cuerda entre dos puntos cualesquiera de la gráfica quede por encima de la curva: si tomamos x, y en el dominio y caminamos por el segmento $tx + (1-t)y$, el valor $f(tx + (1-t)y)$ nunca supera la interpolación lineal $tf(x) + (1-t)f(y)$. Véase la [Figure 1.2](#).

Esta segunda formulación no necesita derivadas ni siquiera que el dominio sea un intervalo de \mathbb{R} : solo necesita que tenga sentido hablar de segmentos, es decir, que el dominio sea un conjunto convexo de un espacio vectorial. Esto nos da la definición *generalizada* de convexidad.

Definición 1.3.7 (Función convexa generalizada). Sea $C \subseteq V$ convexo, llamamos a

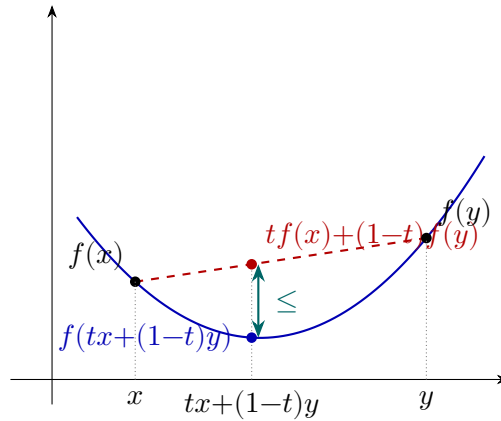


Figura 1.2: La gráfica de una función convexa queda por debajo de la cuerda entre dos puntos cualesquiera.

$f : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexa si para todo $x, y \in C$ y $t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Observa que toda norma es una función convexa, por la desigualdad triangular.

1.4. Sucesiones

Definición 1.4.1. Denotamos con (x^n) a la sucesión de terminos donde $x^k \in V$ para $k \in \mathbb{N}$

Vease que usamos la notación x^k para el k -ésimo elemento de la sucesión, mientras que x_k denota la entrada.

Definición 1.4.2 (Convergencia). La sucesión (x_n) converge a $L \in V$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - L\| = 0$$

, donde este es un límite en \mathbb{R} .

Véase a que esto equivale que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n_0$, entonces $x_k \in B_\epsilon(L)$

Definición 1.4.3 (Sucesión acotada). Decimos que (x^n) está acotada si existe $\epsilon > 0$ tal que $\|x^n\| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Comprueba que toda sucesión convergente está acotada.

Lema 1.4.4 (Propiedades de las sucesiones). Si $(x^n) \rightarrow x$ e $(y^n) \rightarrow y$, entonces

- $(\|x^n\|) \rightarrow \|x\|$
- para una sucesión real $(\lambda^n) \rightarrow \lambda$, $(\lambda^n x^n + y^n) \rightarrow \lambda x + y$

$$\blacksquare \langle x^n, y^n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

Demostramos primero la segunda propiedad.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, vease que usando reiteradamente la desigualdad triangular tenemos que

$$\|\lambda^n x^n + y^n - \lambda x - y\| \leq \|\lambda^n x^n - \lambda x\| + \|y^n - y\|,$$

y

$$\begin{aligned} \|\lambda^n x^n - \lambda x\| &= \|\lambda^n x^n - \lambda x^n + \lambda x^n - \lambda x\| \\ &= \|(\lambda^n - \lambda)x^n + (x - x^n)\lambda\| \leq |\lambda^n - \lambda|\|x^n\| + |\lambda|\|x^n - x\|; \end{aligned}$$

como (x^n) converge, está acotada y existe $M > 0$ tal que $\|x^n\| < M$; finalmente basta tomar $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $\|y^n - y\| < 0.5\epsilon$, $|\lambda^n - \lambda| < 0.25M^{-1}\epsilon$ y $\|x^n - x\| < 0.25|\lambda|^{-1}\epsilon$. Hemos asumido que $|\lambda| \neq 0$ al acotar $\|x^n - x\|$, pero si se diese la igualdad entonces no haría falta acotar. \square

Ahora la última.

Demostración. Asume que la norma está inducida por el producto interno. Sea $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq |\langle x^k, y^k \rangle - \langle x, y \rangle| &= \\ |\langle x^k, y^k \rangle - \langle x^k, y \rangle + \langle x^k, y \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq \\ |\langle x^k, y^k - y \rangle| + |\langle x^k - x, y \rangle| &\leq \\ \|x^k\|\|y^k - y\| + \|y\|\|x^k - x\|, & \end{aligned}$$

donde hemos usado [Teorema 1.2.4 \(Cauchy-Schwarz\)](#); como (x^n) converge, está acotada y existe $M > 0$ tal que $\|x^n\| < M$; finalmente basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para que $\|y^n - y\| < 0.5M^{-1}\epsilon$ y $\|x^n - x\| < 0.5\|y\|^{-1}\epsilon$. Hemos asumido que $\|y\| \neq 0$ al acotar $\|x^n - x\|$, pero si se diese la igualdad entonces no haría falta acotar. \square

Lema 1.4.5. *En \mathbb{R}^n una sucesión converge, $(x^n) \rightarrow x$, si y solo si sus componentes convergen, $(x_j^k) \rightarrow x_j$ para $1 \leq j \leq n$.*

Demostración. Por el [Teorema 1.1.11 \(Equivalencia de normas en \$\mathbb{R}^n\$ \)](#) existen $C_1, C_2 > 0$ tal que $C_1\|x^k - x\|_\infty \leq \|x^k - x\| \leq C_2\|x^k - x\|_\infty$, entonces para $i \in \{1, \dots, n\}$

$$C_1|x_i^k - x_i| \leq C_1 \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j^k - x_j|\} \leq \|x^k - x\| \leq C_2 \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j^k - x_j|\}.$$

Asume que $(x^k) \rightarrow x$; sea $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n_0$, $\|x^k - x\| \leq C_1\epsilon$ y por la cadena de desigualdades anterior esto implica que $(x_i^k) \rightarrow x_i$.

Asume que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $(x_i^k) \rightarrow x_i$; sea $\epsilon > 0$, existen $n_0^i \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i^k - x_i| < \frac{\epsilon}{C_2}$ para $1 \leq i \leq n$; para $k \geq n_0$, donde $n_0 = \max_i \{n_0^i\}$, tenemos que $\max_j \{|x_j^k - x_j|\} \leq \frac{\epsilon}{C_2}$ y por la cadena de desigualdades anterior esto implica que $(x^k) \rightarrow x$ \square

2 Topología euclídea de \mathbb{R}^n

De nuevo, asumimos que V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Definición 2.0.1 (Punto interior). Llamamos a $x \in A \subseteq V$ un punto interior si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq A$.

Definición 2.0.2 (Interior de un conjunto). Dado $A \subseteq V$, su interior es

$$\text{Int } A = \{x \in A : x \text{ es un punto interior de } A\}$$

Definición 2.0.3 (Conjunto abierto). Llamamos a $A \subseteq V$ abierto si $\text{Int } A = A$.

Lema 2.0.4. *Toda bola es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $x \in B_\epsilon(a)$ y $\epsilon' = \epsilon - \|x - a\| > 0$; considera la bola $B_{\epsilon'}(x)$, si $y \in B_{\epsilon'}(x)$, entonces $\|y - x\| < \epsilon - \|x - a\|$ y suando la desigualdad triangular

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \epsilon,$$

lo cual implica $y \in B_\epsilon(a)$ y que para todo $x \in B_\epsilon(a)$, $B_{\epsilon'}(x) \subseteq B_\epsilon(a)$. Esto es, por definición, $\text{Int } B_\epsilon(a) = B_\epsilon(a)$. \square

Proposición 2.0.5 (Propiedades de conjuntos abiertos). 1. *La unión (finita o infinita) de una familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

2. *La intersección de una familia finita de conjuntos abierto es un conjunto abierto.*

3. *Si $A \subseteq B$, entonces $\text{Int } A \subseteq \text{Int } B$.*

Lema 2.0.6 (El interior es el subconjunto abierto más grande). *Sea $A \subseteq V$, el conjunto abierto más grande contenido en A es $\text{Int } A$; esto es, si $C \subseteq A$ y C es abierto, entonces $C \subseteq \text{Int } A$.*

Demostración. Sea $x \in \text{Int } C$, entonces para algún $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x) \subset C$; como $C \subseteq A$, $x \in \text{Int } A$; finalmente como C es abierto $C = \text{Int } C \subset \text{Int } A$ como se quería demostrar. \square

Lema 2.0.7. *Sean $A, B \subseteq V$, entonces $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$*

Demostración. Como $\text{Int } A, \text{Int } B$ son conjuntos abiertos, su intersección $\text{Int } A \cap \text{Int } B$ lo es; como $\text{Int } A \subseteq A$ y $\text{Int } B \subseteq B$, entonces $\text{Int } A \cap \text{Int } B \subseteq A \cap B$. Luego, por [Lema 2.0.6](#) (El interior es el subconjunto abierto más grande), sabemos que $\text{Int } A \cap \text{Int } B \subseteq \text{Int}(A \cap B)$. La otra dirección de la inclusión es trivial. \square

Definición 2.0.8. Si $A \subseteq V$, denotamos su complementario respecto a V por $A^c = V \setminus A$.

Definición 2.0.9 (Conjunto cerrado). Llamamos a $A \subseteq V$ cerrado si A^c es abierto.